géométrie dans l'espace

produit scalaire / produit vectoriel — droites et plan — Sphère

Q1 : produit scalaire et produit vectoriel :

soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} = aa'+bb'+cc'$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}bc'-cb'\\ac'-ca'\\ab'-ba'\end{pmatrix}$$

⚠

exemple : $A(2,0,-1)$; $B(1,1,-1)$; $C(2,-2,1)$

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} ; \quad \vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0-2+0 = -2$$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

méthode :

→ pour mq $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

→ pour mq $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ($\vec{u}\parallel\vec{v}$) $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ ou bien $\vec{u}=\alpha\vec{v}$ (plus rapide)
(A, B et C sont alignés $\vec{AB}\parallel\vec{AC}$)

Rq : pour mq A, B et C ne sont pas alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix} \neq 0$

exemple 1 : soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}$

mq $\vec{u}\parallel\vec{v}$.

on a : $\vec{v} = 3\vec{u} \Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$

exemple 2 : mq A, B et C ne sont pas alignés.

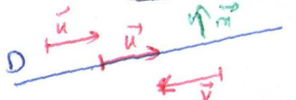
$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaire

donc A, B et C ne sont pas alignés.

Q2 : Définitions d'un vecteur directeur et d'un vecteur normal :



$\vec{u}$ est un vecteur directeur à D.
($\vec{n}$ directeur).

$\vec{n}$ est un vecteur normal à D
($\perp$ à D)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs à P
$\vec{n}$ vecteur normal à P

Q3 : déterminer l'équation paramétrique :

(vecteur directeur).

→ d'une droite : D passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$D\left(A(x_A;y_A;z_A) ; \vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$

$$D : \begin{cases} x = x_A + \alpha a \\ y = y_A + \alpha b \\ z = z_A + \alpha c \end{cases}$$

→ d'un plan $P\left(A, \vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\right)$

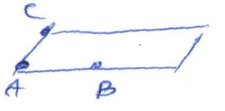
$$P : \begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

exemple : déterminer l'équation paramétrique de la droite (AB), puis du plan (ABC).

$(AB) : \left(A, \vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$:

$$(AB) : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$(ABC) : \left(A, \vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$



$$(ABC) : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = -1 + 2\beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$